06/11/17.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}, \quad \phi'(x^*) = 0$$

Η τάξη σύγκλισης της $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι ακριβώς 1, αν $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = a \neq 0, \ |a| < 1$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}, \quad \text{τουλ. } 2^{ης} \text{ τάξης}$$

αν $f''(x^*) \neq 0$, τότε είναι ακριβώς $2^{ης}$ τάξης.

Θεωρούμε τα αναπτύγματα Taylor των $f(x_n)$, $f'(x_n)$ στο x^*.

$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2} (x_n - x^*)^2 \cdot f''(\xi_{n1})$

$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$, ξ_{n1}, ξ_{n2} μεταξύ x_n και x^*.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$= x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$= \frac{(x_n - x^*)\left(f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})\right) - (x_n - x^*)^2 \cdot f''(\xi_{n2}) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n2})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$= (x_n - x^*)^2 \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n1})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

<u>Θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθ. του Νεύτωνα:</u>

Έστω $f:[\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(\alpha,+\infty)$.
Αν $f(\alpha)<0$, $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$, $\forall x\geq\alpha$ τότε η ακολουθία που παράγεται από την μέθοδο του Νεύτωνα συγκλίνει στην μοναδική ρίζα $x^* \in [\alpha,\infty)$, για κάθε $x_0 \in [\alpha,\infty)$

<u>Αποδ.</u>

(Το παραπάνω θεώρημα θα το αποδείξουμε μέσω μιας άσκησης, στο βιβλίο ωστόσο υπάρχει και η "κανονική" αποδ. του θεωρήματος)

<u>Άσκηση</u> <u>2.34</u> (Βιβλίο Ακριβ.-Δ)

α) Έστω $\phi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση και ρ σταθερό σημείο της ϕ.
Για $x_n \in \mathbb{R}$ θέτουμε $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Αποδείξτε ότι αν ϕ' είναι θετική μεταξύ x_n και ρ, τότε οι αριθμοί $x_{n+1}-\rho$ και $x_n-\rho$ είναι ομόσημοι, ενώ αν η ϕ' είναι αρνητική τότε $x_{n+1}-\rho$ και $x_n-\rho$ είναι ετερόσημοι.

β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Έστω ρ μια ρίζα της $f(x)=0$. Αποδ. ότι για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0\in\mathbb{R}$, η ακολουθία που δίνει η μεθ. Νεύτωνα συγκλίνει στην ρίζα ρ.

Απόδειξη

α) Από το Θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$x_{n+1}-\rho = \phi(x_n)-\phi(\rho) = \phi'(\xi_n)(x_n-\rho)$$

Αν $\phi'(x_n)>0$, x μεταξύ x_n και ρ, τότε

$\phi'(\xi_n)>0 \Rightarrow x_{n+1}-\rho,\ x_n-\rho$ ομόσημοι.

Αλλιώς, αν $\phi'(x)<0$, x μεταξύ x_n, ρ τότε $x_{n+1}-\rho,\ x_n-\rho$ ετερόσημοι.

β) $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $\phi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

Έστω ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε από το ότι $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ ρ είναι μοναδική ρίζα και $f(x)<0$, $\forall x<\rho$, $f(x)>0$, $\forall x>\rho$.

Έστω $x_0<\rho$, τότε $\phi'(x_0) = \dfrac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}<0$.

$\overset{(\alpha)}{\Longrightarrow}$ $(x_1-\rho)$, $x_0-\rho$ ετερόσημοι $\Rightarrow x_1>\rho$.

και $x_n>\rho$, $\forall n=2,3,\ldots$, επειδή $\phi'(x_1)>0$.

Έστω $x_0>\rho$, τότε $\phi'(x_0)>0$ και $x_1-\rho$, $x_0-\rho$ ομόσημοι $\Rightarrow x_1>\rho$ και $x_n>\rho$, $n=1,2,3,\ldots$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1}-x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<0$$

$\Rightarrow x_{n+1}<x_n \Rightarrow$ Η ακολουθία είναι γν. φθίνουσα, είναι φραγμένη από το ρ, άρα θα συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο ρ.

$f(a) < 0$, αρκεί να βρούμε $b > a$ τέτοιο ώστε $f(b) > 0$. Αναπτύσσουμε κατά Taylor την $f(b)$ στο a.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(\xi) > f(a) + (b-a)f'(a)$$

$$f(a) + (b-a)f'(a) > 0 \iff b \geq a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

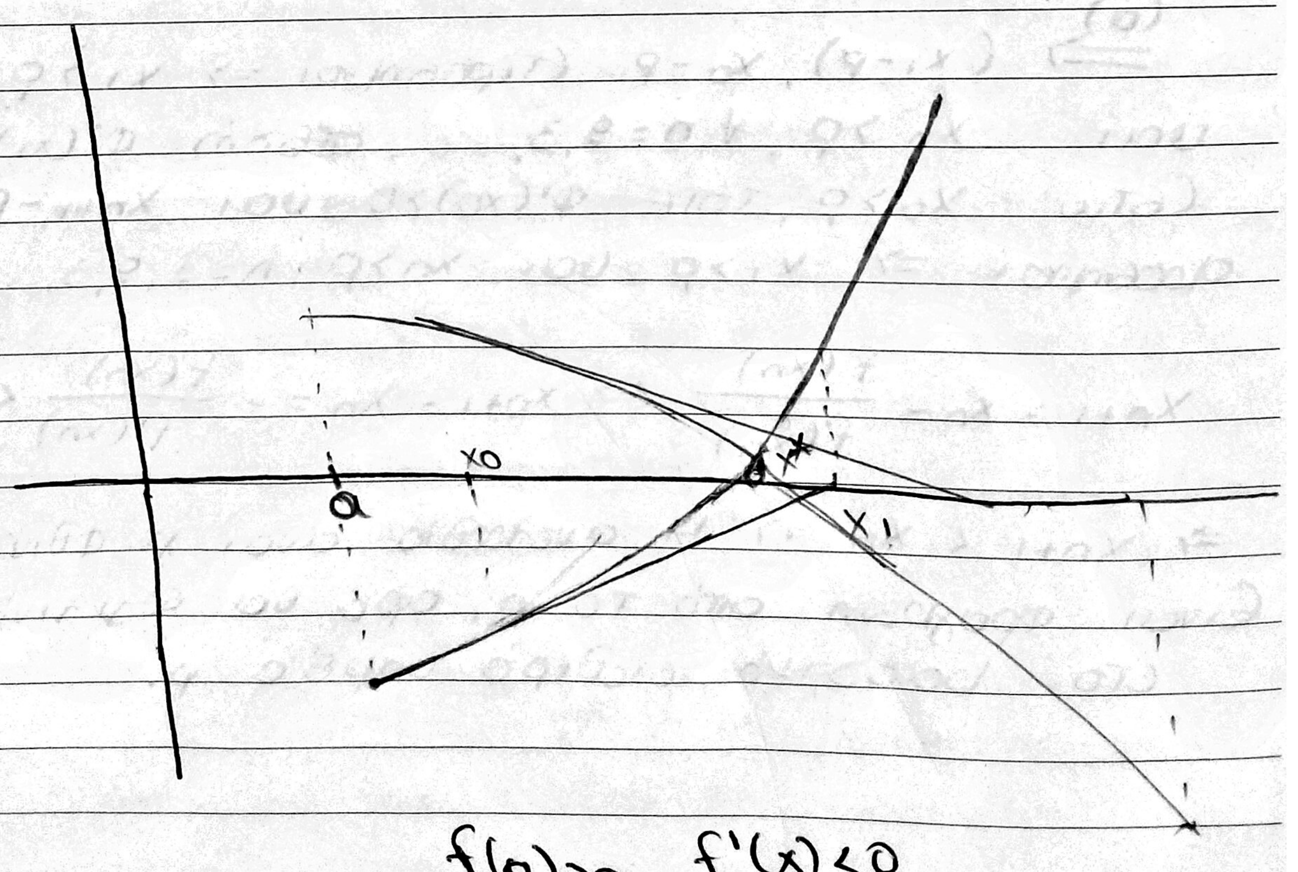
Άρα $\exists\, b \in [a, \infty)$ $\left(b \geq a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right)$

Από (B) σκέλος άσκησης:

- αν $a \leq x_0 < \rho$ τότε $\phi'(x_0) < 0 \Rightarrow x_1 > \rho$ και $x_n > \rho$, $\forall n \geq 1$ επειδή $\phi'(x_1) > 0$.
- αν $x_0 > \rho$, τότε $x_n > \rho$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι x_n είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία, φραγμένη από το ρ, άρα συγκλίνουσα

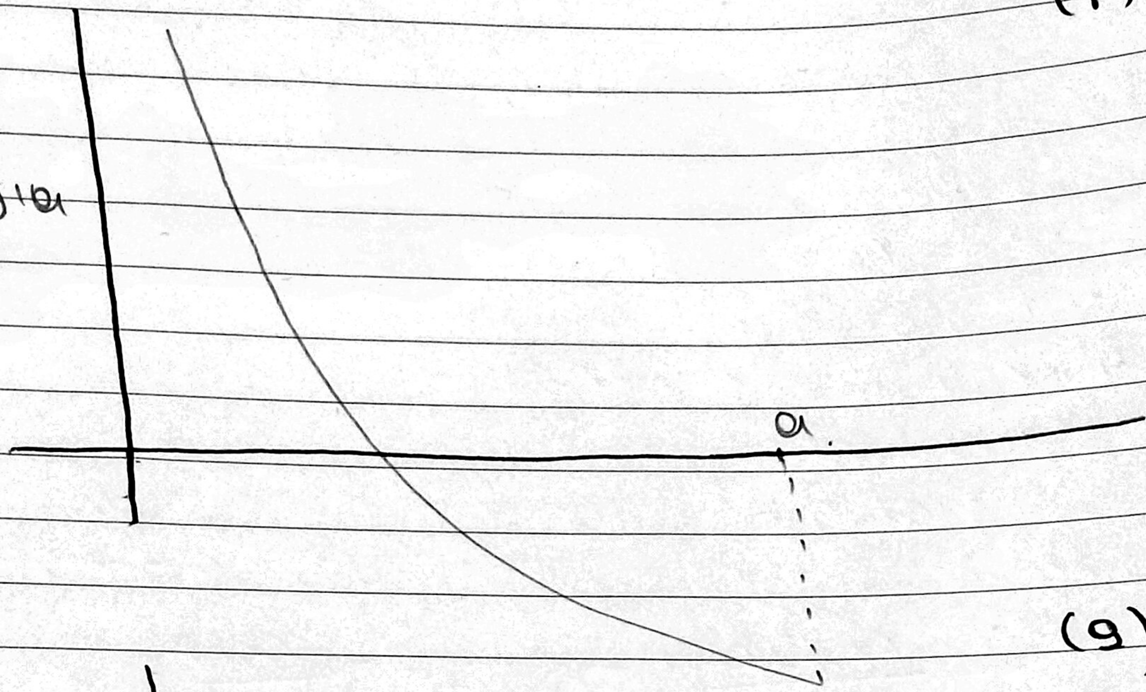
(*)



$f(a) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$

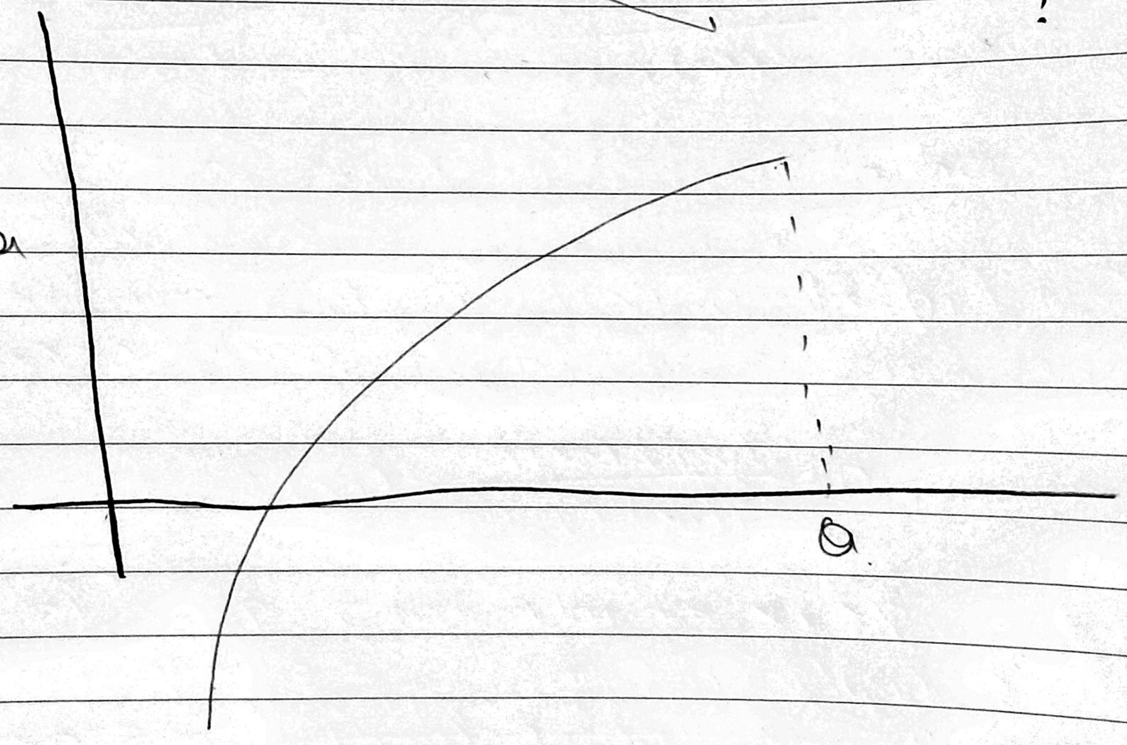
(1)

$f(a) < 0$
$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$, για
$x \in (-\infty, a]$.



(2)

$f(a) > 0$
$f'(x) > 0$
$f''(x) < 0$, για
$x \in (-\infty, a]$.



*Για το σπίτι: Να διατυπώσω και εγώ τις άλλες 2 περιπτώσεις, δηλαδή τα 2 παρακάτω σχήματα (1 και 2), όπως το σχήμα (*)